Master 2 Mathématiques fondamentales

SEMESTRE 1 (S3 du master)

U.E. 1, Analyse réelle et Probabilités

UE Analyse réelle et Probabilités | 6 ECTS | 64 h Eq TD
ECUE Analyse réelle => aucun crédit | coeff. 1 [CM 9 h | TD 15 h | TP 4 h |Capitalisable : O
ECUE Probabilités => aucun crédit | coeff. 1 [CM 9 h | TD 15 h | TP 4 h | Capitalisable : O
Ce qui fait pour chaque ECUE :
16 séances (cours ou TD) d'1h30
3.5 h de colles

PARTIE 1 : ANALYSE RÉELLE

- Suites et séries à termes réels.
  - Relations de comparaison et sommation
  - Convergence, valeurs d'adhérences, liminf, limsup, sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
  - Calculs de limites et de sommes.
  - Suites récurrentes, rapidité de convergence, développement asymptotique
  - Accélération de la convergence des suites, Méthode de Newton.
- Fonctions
  - Continuité, dérivabilité, continuité uniforme
  - Convergence des suites et séries de fonctions, continuité, dérivabilité de la limite.
- Intégrales
  - Techniques de calcul d'intégrales
  - Intégrales impropres
  - Interversion limites intégrales

PARTIE 2 : PROBABILITÉS

- Variables aléatoires
  - Variable aléatoire, lois classiques, théorème de transfert.
  - Espérance, variance, inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Jensen.
  - Calculs de lois de probabilité, fonction de répartition, fonction quantile, fonction génératrice, fonction caractéristique. Simulation de variables aléatoires.
  - Indépendance d'événements et de variables aléatoires, Lemmes de Borel-Cantelli, loi du 0-1.
  - Somme de variables aléatoires indépendantes.
  - Probabilités conditionnelles, formule de Bayes.
- Convergence de variables aléatoires
  - Convergences presque sûr, en probabilité, dans L^p, en loi.
  - Les grands théorèmes limites (loi forte et faible des grands nombres, théorème central limite), théorème de Lévy.
  - Applications : méthode de Monte Carlo, construction d'intervalle de confiance en statistique.

U.E. 2, Groupes et géométrie

UE Groupes et géométrie | 6 ECTS | 64 h Eq TD
[CM 18 h | TD 30 h | TP 7 h
Ce qui fait :
32 séances (cours ou TD) d'1h30
7 h de colles

- Généralités de théorie des groupes
  - Sous-groupes distingués, Structure de groupe quotient, Théorème de factorisation. Simplicité.
  - Groupe symétrique, Sous-groupe alterné, Théorème de Cayley, Simplicité de A_n pour $n \neq 4$.
  - Actions de groupes, Espace quotient, Systèmes de représentants des orbites. Équation aux classes.
  - Groupe des isométries d'un espace euclidien. Groupe diédral. Groupe affine de $\mathbb{R}^n$.
  - Structure de produit semi-direct.
- Groupes abéliens de type finis.
  - Structure de groupe cyclique. Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
  - Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, cyclicité pour $n > 2$.
  - Théorème de classification des groupes abéliens de type finis. Facteurs invariants.
- Groupes finis non-abéliens.
  - Théorème de Cauchy, p-groupes, Théorèmes de Sylow.
  - Applications à la classification des groupes de petit cardinal.
  - A_5 est le seul sous-groupe simple d'ordre 60.
- Groupes linéaires classiques en situation géométrique.
  - Groupe linéaire, et spécial linéaire, d'un espace vectoriel de dimension finie. Exemples de parties génératrices.
  - Groupe orthogonal d'une forme quadratique réelle ou complexe non-dégénérée.
  - Groupe unitaire et spécial unitaire d'un espace hermitien.
  - Structure de $O(2)$, interprétation dans $\mathbb{C}$. Structure de $SO(3)$ et $SU(2)$, interprétation dans $\mathbb{H}$.
  - Sous-groupes finis de $SO(3)$ et groupes d'isométries des solides de Platon.

U.E. 3, Topologie, calcul différentiel et équations différentielles

UE Topologie et calcul différentiel | 6 ECTS | 64 h Eq TD
[CM 18 h | TD 30 h | TP 7 h
Ce qui fait :
32 séances (cours ou TD) d'1h30
7 h de colles

- Topologie
  - Topologie sur les espaces métriques, topologie induite, produit fini d'espaces métriques.
  - Topologie dans les espaces vectoriels normés, normes équivalentes, cas de la dimension finie.
  - Compacité, équivalence entre Bolzano-Weierstrass et Borel-Lebesgue.
  - Complétude, espaces de Banach, séries absolument convergentes dans un espace de Banach, espaces classiques.
  - Connexité, composantes connexes, connexité par arcs.
  - Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.
  - Applications lipschitziennes, théorèmes de points fixes.
- Equations Différentielles
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, wronskien, exponentielle de matrices.
  - Résolution d'équations différentielles linéaires (coefficients constants, systèmes), méthode de variation de la constante.
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, lemme de Gronwall, théorème des bouts.
  - Études qualitatives des équations différentielles autonomes, portrait de phase, système de Lotka-Volterra.
  - Stabilité des points d'équilibre, théorème de linéarisation.
  - Équation de transport et méthode des caractéristiques.
- Calcul différentiel

- Différentielle, dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles, matrice hessienne, composition, théorème des accroissements finis, théorème de Schwarz.
- Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, applications.
- Extremums, conditions nécessaire et suffisante dans la recherche d'extremum.
- Fonctions monotones et convexes à variables réelles.
- Comparaison séries-intégrales.

U.E. 4, Algèbre linéaire et bilinéaire

UE Algèbre linéaire et bilinéaire | 6 ECTS | 64 h Eq TD
[CM 18 h | TD 30 h | TP 7 h
Ce qui fait :
32 séances (cours ou TD) d'1h30
7 h de colles

- Algèbre linéaire
  - Définition de la dimension, base incomplète, formule de Grassmann
  - Applications linéaires, matrices, rang, opérations élémentaires
  - Dualité en algèbre linéaire, définition d'un sous-espace par une famille génératrice ou par un système d'équations
  - Définition du déterminant, utilisations du déterminant
  - Endomorphismes remarquables : projecteurs, symétries, nilpotents
  - Réduction des endomorphismes : Sous-espaces stables, polynômes d'endomorphismes, théorème de Cayley-Hamilton, réduction de Jordan et Frobenius, décomposition de Dunford.
  - Exponentielle de matrices
  - Topologie matricielle
- Algèbre bilinéaire
  - Formes bilinéaires, quadratiques : polarisation, rang, noyau, matrices congruentes.
  - Orthogonalité, isotropie, algorithme de Gauss.
  - Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et les corps finis.
  - Espaces euclidiens/ hermitiens : adjoint d'un endomorphisme, diagonalisation des endomorphismes normaux, "réduction simultanée".
  - Isométries vectorielles : générateurs du groupe orthogonal, classification et réduction en dimension 2 et 3.
  - Algèbre sesquilinéaire : formes quadratiques hermitiennes, signature, groupe unitaire.

U.E. 5, Fonctions holomorphes et intégration

UE Intégration et holomorphie | 6 ECTS | 64 h Eq TD
[CM 18 h | TD 30 h | TP 7 h
Ce qui fait :
32 séances (cours ou TD) d'1h30
7 h de colles

- Séries entières
  - Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.
  - Transformation d'Abel et applications.
  - Utilisation des séries entières (calcul d'intégrales, de suites, de solutions d'équations différentielles, problèmes de dénombrement).
- Fonctions holomorphes
  - Conditions de Cauchy-Riemann.
  - Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux.
  - Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point. Formule de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique.

- Détermination du logarithme, de la racine complexe.
- Singularités isolées. Fonctions méromorphes. Séries de Laurent. Théorème des résidus.
- Suites et séries de fonctions holomorphes et méromorphes.
- Compléments. Théorème de l'image ouverte. Inversion locale.

- Intégration
  - Rappels de théorie de l'intégration. Théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Théorème de convergence dominée.
  - Esapces L^p. Complétude. Inégalité de Hölder.
  - Théorème de Fubini.
  - Changement de variables dans une intégrale multiple.
- Intégrales à paramètres et transformées
  - Rappels sur l'intégrale à paramètre . Continuité. Dérivabilité. Application à la transformation de Laplace.
  - Convolution. Régularisation et approximation par convolution.
  - Intégrales à paramètre et holomorphie. Application à la fonction Γ.
- Séries de Fourier
  - Lemme de Riemann-Lebesgue.
  - Produit de convolution de fonctions périodiques.
  - Théorème de Dirichlet.
  - Théorème de Féjer et applications.
  - Théorème de Parseval.
  - Équation de la chaleur sur un intervalle avec les séries de Fourier.

SEMESTRE 2 (S4 du master)

U.E. 6, Pédagogie inversée en analyse

UE Pédagogie inversée en analyse | 6 ECTS | 64 h Eq TD
[CM 18 h | TD 30 h | TP 7 h
Ce qui fait :
32 séances (cours ou TD) d'1h30
7 h de colles

Une grande partie des séances place les étudiants à se mettre dans la situation d'enseignant.

SUPPORT DE THÉMATIQUE CHOISI : COMPLÉMENTS D'ANALYSE

- Géométrie différentielle
  - Exemples pratiques d'applications de l'inversion locale et des fonctions implicites.
  - Problèmes d'extremum, Théorème des extremas liés et applications.
  - Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, espace tangent, position relative, cas des courbes et des surfaces.
- Transformée de Fourier
  - Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Théorème d'inversion de Fourier L^1. Transformation de Fourier-Plancherel.
  - Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ avec la transformée de Fourier.
  - Espace de Schwartz.
  - Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.
- Espaces de Hilbert
  - Espaces pré-hilbertiens.
  - Projection sur un convexe fermé, projection orthogonale sur un sev fermé.
  - Dual d'un espace de Hilbert. Théorème de représentation de Riesz.
  - Bases hilbertiennes dans le cas séparable. Cas des espaces l^2 et L^2, polynômes orthogonaux.
- Convexité
  - Fonctions convexes de plusieurs variables : caractérisation de la convexité des fonctions de classe C^1 et C^2 définies sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.
  - Théorème de séparation des convexes de Hahn-Banach dans le cas euclidien.

— Compléments de compacité dans les evn
  — Théorème de Riesz.
  — Théorème d'Ascoli.

U.E. 7, Pédagogie inversée en algèbre

UE Pédagogie inversée en analyse | 6 ECTS | 64 h Eq TD
[CM 18 h | TD 30 h | TP 7 h
Ce qui fait :
32 séances (cours ou TD) d'1h30
7 h de colles

SUPPORT DE THÉMATIQUE CHOISI : CORPS ET GÉOMÉTRIE

- Arithmétique
  - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, fonction indicatrice d'Euler, théorème chinois.
  - Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
  - Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$, irréductibilité sur $\mathbb{Q}$, théorème de Dirichlet.
  - Entiers de Gauss et Théorème des deux carrés.
- Anneaux
  - Propriétés arithmétiques des anneaux.
  - Anneaux factoriels, principaux, noethériens.
- Extensions de corps
  - Polynômes et racines, polynômes symétriques, localisation des racines.
  - Critères d'irréductibilité des polynômes.
  - Résultant et discriminant, application à l'intersection de courbes et surfaces algébriques.
  - Nombres algébriques et transcendants, extensions algébriques.
  - Corps de rupture, de décomposition, théorème de l'élément primitif.
  - $\mathbb{C}$ algébriquement clos.
  - Corps finis, morphisme de Frobenius, théorème de Chevalley.
  - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples.
- Géométrie affine et euclidienne
  - Espace affine et espace vectoriel associé, barycentres.
  - Transformations affines, groupe affine.
  - Isométries d'un espace affine euclidien.
  - Classification des isométries en dimension 2 et 3.
  - Théorème de Desargues, Ménélaüs, Pappus, ...
  - Coniques, théorème de Pascal.
  - Parties convexes, points extrémaux.
  - Théorèmes de Carathéodory, de Minkowski (Krein-Milman).

U.E. 8, Modélisation et simulation

UE Modélisation et simulation (2 choix) | 6 ECTS | 108 h Eq TD soit 54 h Eq TD pour chacune des options
Option calcul scientifique [CM 0 h | TD 24 h | TP 30 h
Option probabilités [CM 0 h | TD 24 h | TP 30 h
Ce qui fait pour chaque option :
16 séances de TD d'1h30
16 séances de TP d'1h30
9h d'oraux blancs

Première option, U.E. 8A, Modélisation et probabilités, option A

Partie commune du programme d'écrit pour tous les étudiants (2 séances d'1h30) :

- Statistiques descriptives univariées : indicateurs de position et indicateurs de dispersion. Représentations graphiques de données.
- Série statistique à deux variables quantitatives, nuage de points associé. Coefficient de corrélation. Droite de régression des moindres carrés.

Partie spécifique de l'option A :

- Chaines de Markov
  - Chaine de markov à espace d'états fini ou dénombrable, classification des états, récurrence, transience, mesure stationnaire.
  - Théorème de convergence : loi des grands nombres, apériodicité et convergence en loi.
  - Exemples du processus de Galton-Watson et de la marche aléatoire simple.
- Processus de Poisson
  - Construction du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ à partir de variables exponentielles.
  - Indépendance, stationnarité et loi des accroissements.
- Espérance conditionnelle
  - Espérance conditionnelle, définition des (sur/sous-)martingales à temps discrets, temps d'arrêt.
  - Exemples d'utilisation des théorèmes d'arrêt et de convergence presque sûre et L^2.
- Statistiques
  - Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
  - Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition, exemples et contre-exemples.
  - Tests paramétriques. Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.
- Vecteurs gaussiens
  - Vecteurs gaussiens : définition, simulation, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$.
  - Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire, exemples d'utilisation.

Seconde option, U.E. 8B, Modélisation et calcul scientifique, option B

Partie commune du programme d'écrit ou besoin pour les leçons pour tous les étudiants (6 séances d'1h30) :

- Algèbre linéaire partie I
  - Normes matricielles, rayon spectral, conditionnement.
  - Systèmes linéaires : méthodes directes et itératives (convergence, lien avec le rayon spectral).
  - Recherche d'éléments propres (par exemple méthode de la puissance).
- Résolution d'équations non linéaires, Optimisation partie I
  - Méthode de dichotomie, de Picard, de Newton : convergence et estimation d'erreur.
  - Minimisation de fonctions convexes (dimension finie), méthode de gradient (à pas constant). Moindres carrés.
- Équations différentielles partie I
  - Consistance, stabilité, convergence, ordre d'un schéma numérique.
  - Méthode d'Euler explicite (stabilité, ordre de consistance, ordre de convergence).

Partie spécifique de l'option B :

- Suite de l'algèbre linéaire : Théorème de Perron-Frobenius.
- Suite de la résolution d'équations non linéaires : Minimisation sous contrainte.
- Équations différentielles partie II
  - Méthode d'Euler implicite, comparaison avec Euler implicite, avec Runge-Kutta. Problèmes raides.
  - Portraits de phase, stabilité par linéarisation.

- Modélisation
  - Quelques aspects de modélisation de situations concrètes (physique, biologique, etc), critiques des modèles.
  - Dérivation des équations (elliptiques, paraboliques, hyperboliques...).
- Équations aux Dérivées Partielles
  - Espace $H_0^1(]0,1[)$, problème de Dirichlet 1d, théorème de Lax-Milgram.
  - Application de Lax-Milgram aux équations elliptiques en dimension 1.
  - Laplacien en 1d : approximation par différences finies, forme matricielle. Notions de stabilité, consistance, convergence et ordre.
  - Techniques de résolution classiques (équation de transport, équation de la chaleur).
  - Approximation par différences finies : notions de stabilité (condition CFL), consistance, convergence et ordre. Approximation spectrale (FFT).

U.E. 9, Restitution structurée de connaissances en analyse

UE Restitution structurée de connaissances en analyse | 6 ECTS | 72 h Eq TD
[CM 0 h | TD 57 h | TP 15 h
Ce qui fait :
57 h de leçons et développements
15 h d'oraux blancs

U.E. 10, Restitution structurée de connaissances en algèbre

UE Restitution structurée de connaissances en algèbre | 6 ECTS | 72 h Eq TD
[CM 0 h | TD 57 h | TP 15 h
Ce qui fait :
57 h de leçons et développements
15 h d'oraux blancs