

# Programme M1 IM



Année 2025-2026



Le Master Ingénierie Mathématique (IM), en lien direct avec les besoins du monde des entreprises, apporte une solide formation à la fois théorique et pratique. En première année le cursus a une dimension généraliste en probabilités, statistiques, calcul scientifique et informatique. Des ateliers animés par des professionnels permettent aux étudiantes et aux étudiants de découvrir le monde de l'entreprise. Il se divise en un tronc commun et des cours d'options. L'étudiant-e doit choisir l'option probabilité-statistique (PS) ou l'option analyse numérique-calcul scientifique (ANCS).

## Programme:

### Semestre 1

Au premier semestre, chaque étudiant-e en formation initiale doit choisir un parcours parmi les trois proposé :

- **Probabilités et Statistiques (PS) :**
  - EDP & Différences Finies (6 ECTS) ;
  - Monte-Carlo et chaînes de Markov (6 ECTS) ;
  - Traitement des Données (6 ECTS) ;

- Langages Orientés Objets (3 ECTS);
- Processus Stochastiques (3 ECTS) ;
- Séries Temporelles (3 ECTS) ;
- **Calcul Scientifique (CS) :**
  - EDP & Différences Finies (6 ECTS) ;
  - Monte-Carlo et chaînes de Markov (6 ECTS) ;
  - Traitement des Données (6 ECTS) ;
  - Modèles et méthodes en mécanique (3 ECTS) ;
  - Langages Orientés Objets (3 ECTS);
  - Introduction aux EDP (3 ECTS) ;
- **Mathématiques et modélisation du vivant (MMV) :**
  - Choisir 2 UE parmi les 3 suivantes :
    - EDP & Différences Finies (6 ECTS) ;
    - Monte-Carlo et chaînes de Markov (6 ECTS) ;
    - Analyse Fonctionnelle et espaces de Hilbert (6 ECTS) ;
  - Choisir 2 UE parmi les 4 suivantes :
    - Séries Temporelles (3 ECTS)
    - Processus Stochastiques (3 ECTS) ;
    - Modélisation et Simulation Numérique (3 ECTS) ;
    - Introduction aux EDP (3 ECTS) ;
  - Physiologie mathématique de la cellule (3 ECTS) ;
  - Systèmes dynamique en sciences du vivant (6 ECTS).

## Semestre 2

Au second semestre, chaque étudiant-e en formation initiale doit choisir un parcours parmi les trois proposé :

- **Probabilités et Statistiques (PS) :**
  - Optimisation et traitement des données (6 ECTS) ;
  - Statistique mathématique (6 ECTS) ;
  - Découverte du monde professionnel (6 ECTS) ;
  - Apprentissage supervisé (3 ECTS);
  - Contrôle optimal et introduction a l'apprentissage par renforcement (3 ECTS) ;
  - Stage ou projet (4 ECTS) ;
  - Anglais professionnel (2 ECTS).
- **Calcul Scientifique (CS) :**
  - Optimisation et traitement des données (6 ECTS) ;
  - Statistique mathématique (6 ECTS) ;
  - Découverte du monde professionnel (6 ECTS) ;
  - Éléments finis (3 ECTS);
  - Modélisation et Simulation Numérique (3 ECTS) ;
  - Stage ou projet (4 ECTS) ;
  - Anglais professionnel (2 ECTS).
- **Mathématiques et modélisation du vivant (MMV) :**
  - Choisir 2 UE parmi les 3 suivantes :
    - Optimisation et traitement des données (6 ECTS) ;
    - Statistique mathématique (6 ECTS) ;
    - Analyse de Fourier et distributions (6 ECTS) ;
  - Découverte du monde professionnel (6 ECTS) ;
  - Modèles de populations structurées (3 ECTS) ;

- Modèles spatio-temporels en sciences du vivant (3 ECTS) ;
- Stage ou projet (4 ECTS) ;
- Anglais professionnel (2 ECTS).

| M1 IM   | options Probas-stats/Calcul scientifique  |                                     | Option Mathématiques et Modélisation du Vivant |  |                                     |     |
|---|---|-------------------------------------|--|--|-------------------------------------|-----|
| S1  | Méthode de Monte-Carlo et chaînes de Markov   | 60h                                 | Méthode de Monte-Carlo et chaînes de Markov    | Analyse Fonctionnelle et Espaces de Hilbert    | 60h                                 |     |
|   | EDP & différences finies  | 60h                                 | EDP & différences finies                       |  | 60h                                 |     |
|   | Traitement et analyse des données   |                                     | 72h  | Systèmes dynamiques en Sciences du Vivant      |                                     | 60h |
|   | Programmation (C++, Python)   |                                     | 50h  | Physiologie Mathématique de la Cellule         |                                     | 60h |
|   | Séries temporelles  | Modélisation & simulation numérique | 80h  | Séries temporelles                             | Modélisation & simulation numérique | 80h |
|   | Processus stochastiques   | Introduction aux EDPs               |  | Processus stochastiques                        | Introduction aux EDPs               |     |
| Insertion professionnelle                         |   |                                     |  |  |                                     |     |
| S2  | Statistique   |                                     | 60h  | Statistique                                    | Analyse de Fourier et Distributions | 60h |
|   | Optimisation et Traitement des données  |                                     | 60h  | Optimisation et Traitement des données         |                                     | 60h |
|   | Contrôle optimal et introduction à l'apprentissage par renforcement                           | Modèles et méthodes en Mécanique    | 80h  | Modèles spatio-temporels en Sciences du Vivant |                                     | 60h |
|   |   |                                     |  | Modèles de Populations Structurées             |                                     |     |
|   | Apprentissage supervisé   |                                     | Eléments finis                                 |  |                                     |     |
|   | Découverte du monde de l'entreprise: Informatique pour l'entreprise & Ateliers professionnels |                                     |  |  |                                     |     |
| Restitution des connaissances (Anglais + Mémoire) |   |                                     |  |  |                                     |     |

## Cours de mathématiques au semestre 1

### EDP et Différences Finies

On parcourra dans ce cours deux des trois grandes classes de problèmes aux limites classiques en dimension un d'espace : les équations elliptiques (dont le prototype est l'équation de Poisson) et paraboliques (dont le prototype est l'équation de la chaleur). On commencera par s'intéresser à leur résolution analytique formelle (un cours accéléré sur les séries de Fourier sera fait) dans un cas régulier. Quand il y a lieu, on mettra en avant leurs caractéristiques classiques (principes du maximum, d'énergie, etc).

On donnera ensuite des schémas d'approximation numérique classiques de type différences finies dont on étudiera la stabilité, la consistance ainsi que la convergence. Quand cela sera possible, on mettra en avant des propriétés de préservation au niveau discret des caractéristiques continues. La mise en œuvre sur ordinateur au cours de séances de TP sera centrale.

### Méthode de Monte Carlo et Chaînes de Markov

1. Simulation de variables aléatoires : méthode de la transformée inverse, méthode du rejet, algorithme de Box-Muller.
2. Fonctions caractéristiques et convergences stochastiques : p.s., en probas, en loi. Théorèmes limites : LGN et TCL.
3. Méthode de Monte-Carlo. Intervalles de confiance. Comparaison avec les méthodes déterministes. Méthodes de réduction de variance.

4. Chaînes de Markov sur un espace d'états dénombrable : Définition et propriétés élémentaires. Exemples. Temps d'arrêt. Propriétés de Markov faible et forte (sans introduire l'espérance conditionnelle). Classification des états : classes de communication, récurrence, transience. Loi stationnaire : existence, unicité, calcul, loi réversible. Théorème ergodique. Convergence en loi de la chaîne. Applications : Processus de Galton-Watson, Modèles d'Ehrenfest, Modèle de Wright-Fisher,...
5. Simulation de chaînes de Markov. Méthodes de Monte-Carlo par Chaîne de Markov : Algorithme de Metropolis-Hastings, vitesse de convergence.

## Processus stochastiques

L'objectif du cours est d'étudier l'aspect dynamique des modèles aléatoires, lorsque les systèmes considérés dépendent du temps en supplément du hasard. Pareille situation est très fréquente en physique, en biologie ou encore en économie. Ici, nous nous focaliserons sur deux exemples centraux de la théorie des processus stochastiques : les chaînes de Markov, analogues aléatoires des suites récursives déterministes, et les martingales, traduction mathématique de la notion de dynamique équitable en économie. Il s'agira d'introduire les concepts essentiels et d'en comprendre les propriétés principales : manipulations calculatoires d'un côté et comportements en temps long d'un autre.

1. Rappels sur les espaces  $L^p$  (sans trop de démonstration)
2. Espérance conditionnelle. Définition et techniques de calcul.
3. (Sur/Sous/-)Martingales : Notion de filtration. Définition et propriétés élémentaires. Exemples. Th. de convergence p.s. et  $L^p$ . Temps d'arrêt et théorème d'arrêt. Inégalités maximales de Doob. Applications.
4. Propriétés de Markov forte et faible vues du point de vue espérance conditionnelle.
5. (si le temps le permet) Introduction aux processus de Poisson et aux files d'attente, aux Processus de Markov à temps continu.

## Séries temporelles

Séries temporelles : Une série temporelle est une suite réelle  $(x_n)_t$  où  $t$  représente le temps. L'objectif de l'étude des séries temporelles est la prévision (de ventes d'un produit, de la consommation d'électricité ...). Les techniques utilisées intéressent donc de nombreux acteurs de l'économie.

1. Indices descriptifs.
2. Lissages.
3. Estimation de la tendance et de la saisonnalité.
4. Modélisation des séries temporelles. Composantes périodiques. Processus ARCH et GARCH.

## Langage orienté objet

**Langage orienté objet** : Ce cours est une initiation à la Programmation Orienté Objet vue à travers le langage C++ et le langage Python. Y seront abordés les éléments de syntaxe et les notions de programmation objet nécessaires à l'implémentation d'algorithmes en C++. Ce cours se veut avant tout pratique et pragmatique.

**Pour la partie C++**, en suivant ce cours, un étudiant devra être capable de produire du code et d'écrire un programme informatique de bout en bout afin de résoudre un problème simple donné. Notions abordées : le C++ d'un point de vue impératif, syntaxe élémentaire; éléments de POO en C++ et implémentation; utilisations pratiques en TP.

**Concernant la partie Python** du cours, on abordera : notions de base de Python; utilisation des modules numpy, scipy, matplotlib; classes en Python; illustration par des applications simples en TPs (représentation graphique, intégration numérique, etc).

Prérequis : Une connaissance préalable d'un langage de programmation impératif est un avantage. Néanmoins le cours reprendra ces notions et un étudiant n'ayant jamais programmé mais motivé pourra suivre ce module.

**Simulations stochastiques** : Les méthodes de Monte-Carlo ont pour but de calculer des quantités numériques en utilisant des suites aléatoires. Ces méthodes sont utilisées en statistiques, économie . . . Elles sont un outil de base en mathématiques appliquées.

1. Rappels : Convergences de v.a., Loi des grands nombres ; Théorème Central Limite ; Intervalles de confiance.
2. Description des méthodes (comparaison avec les méthodes déterministes).
3. Simulation de variables aléatoires (méthode de rejet, ).
4. Réduction de variance.
5. Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov.

### Modèles et méthodes en mécanique

La mécanique des solides indéformables est l'étude des relations forces-déplacements. En réalité, sous l'action de forces, il y a toujours déformation du corps, indépendamment du fait que le corps soit au repos (statique) ou soit à l'état de mouvement non uniforme (dynamique). La mécanique des milieux continus (MMC) est une généralisation qui prend en compte la déformation des corps solides, liquides, gaz, plasmas, etc. Elle décrit les contraintes, les déformations et leurs relations (comportement du matériau). La MMC introduit le formalisme mathématique nécessaire à la modélisation des solides et des fluides. Ce cours est une introduction à ces notions. Les outils mathématiques introduits sont d'un usage général qui ne se limite pas aux applications en mécanique.

### Traitement des données : Analyse de données et bases de données

L'objectif de ce cours est multiple :

1. donner les bases pour la conception d'un schéma conceptuel de données. La méthode enseignée ici sera la méthode ENTITE/ASSOCIATION de MERISE. Nous apprendrons à définir des entités et des associations, à convertir le modèle conceptuel de données vers le modèle logique de données et à traduire le modèle logique de données vers la base de données cible. Nous apprendrons aussi à utiliser le logiciel Poweramc de Sybase pour définir le schéma conceptuel de données MERISE et effectuer les conversions automatiques de ce MCD vers un schéma relationnel Oracle.
2. maîtriser le langage de manipulation et de définition de données SQL. Nous nous familiariserons pendant ce cours avec l'outil SQLPLUS qui est le langage permettant de manipuler interactivement les commandes SQL. Ce langage offre de nombreuses fonctions de formatage et d'édition de données. Les différentes facettes de SQL seront étudiées : le Langage de Manipulation de Données (LMD), le Langage de Définition de Données (LDD) et le Langage de Contrôle de Données (LCD). Nous apprendrons à
  - (1) consulter et mettre à jour des informations stockées dans une base de données.
  - (2) créer, modifier et supprimer des tables, des indexes, des séquences et des vues
  - (3) contrôler des transactions et surtout de poser des verrous en cas de nécessité

(4) consulter le dictionnaire de données Oracle

3. apprendre le langage de programmation bases de données Oracle PL/SQL. Ce langage permet une manipulation efficace des bases de données. Il permet d'effectuer des boucles, des parcours conditionnels, etc. ce qui n'est pas possible avec SQL. Le langage PL/SQL est incontournable dans l'environnement Oracle car il sert à coder les procédures stockées Oracle, les triggers. Il sert aussi à écrire du code dans les outils Oracle tels que Forms (L4G Oracle). De nombreuses extensions du SGDB Oracle sont fournies sous forme de package PL/SQL.

## Systèmes dynamiques en sciences du vivant

### Part 1: Compléments de Théorie des Systèmes Dynamiques

1. Analyse de l'espace des phases, oscillations
2. Théorie des bifurcations
3. Théorie des perturbations singulières, systèmes lents-rapides
4. Oscillateurs couplés

### Part 2: Ecologie mathématique et épidémiologie

1. Modèles de population discrets et continus à une ou plusieurs espèces.
2. Modèles épidémiologiques et dynamique des maladies infectieuses.

Mots clés: Lotka-Volterra, SIR

### Part 3: Rythmes biologiques

1. Horloges biologiques
2. Réactions biochimiques.
3. Oscillateurs biologiques et interrupteurs.
4. Oscillateurs perturbés et couplés.

Mots clés: rythmes circadiens, Michaelis-Menten, Hodgkin-Huxley, Belousov-Zhabotinski, Goodwin

Biblio: Murray "Mathematical Biology"

## Physiologie mathématique de la cellule

1. Réseaux de régulations génétiques
2. Réseaux métaboliques
3. Réseaux de signalisation
4. Energétique cellulaire
5. Communications intercellulaires.
6. Pharmacocinétique-
7. Dynamique du cytosquelette, moteurs moléculaires
8. Transport transmembranaire, canaux ioniques, transport actif (e.g. pompe sodium-potassium)
9. Osmose.
10. Contrôle du volume cellulaire.

Biblio: Keener Sneyd "Mathematical physiology"

## Cours de mathématiques au semestre 2

## Optimisation et Traitement des données 1 & 2

Techniques de base pour l'optimisation (numérique) en dimension finie : résultats classiques de l'optimisation sans et avec contraintes, exemple de l'algorithme du gradient à pas constant avec résultats de convergence (preuves incluses). Mise en œuvre en TP.

## Éléments finis

L'utilisation des résultats d'optimisation vus en première partie du cours permettra d'appréhender les principes variationnels sous-jacents. On se concentrera sur le problème de minimisation de l'énergie de Dirichlet. On donnera la formulation variationnelle associée (formellement ou dans le cas régulier) puis les principes de discrétisation des méthodes de Galerkin. On étudiera le problème de minimisation discret et la formulation variationnelle discrète qui en découle (mise sous forme matricielle, premières propriétés du système linéaire associé, estimation d'erreur préliminaire). On étudiera en particulier le cas des approximations nodales de Lagrange, en commençant par le cas P1 en 1D : construction et propriétés de la matrice, énoncé de l'erreur de convergence. On abordera ensuite la mise en œuvre de l'approximation P2 en 1D et P1 en 2D. On s'appliquera à détailler l'implémentation pratique notamment lors des séances de TP.

## Modélisation simulation numérique

L'objectif de ce cours est de fournir des bases volontairement pratiques en modélisation et analyse numérique. L'enseignement comportera essentiellement une suite de cas pratiques inspirés le plus souvent de modélisation en biologie, physique ou encore réseaux sociaux. La résolution numérique de ces modélisations permettra d'aborder quelques thèmes d'analyse numérique des EDO, l'interpolation, EDP, l'algèbre linéaire, la recherche de valeurs propres, etc.

## Statistique Mathématique

Le but de ce cours est de poser les bases de la statistique mathématique.

1. Problématiques de la statistique mathématique et notion de modèle statistique. Exemples de modèle.
2. Notions d'estimateur et de risque en statistique. Normalité asymptotique d'un estimateur d'un paramètre réel. Construction d'intervalles de confiance. Utilisation des inégalités de Markov et Hoeffding. Utilisation du théorème central limite, de la méthode delta et du lemme de Slutsky. Utilisation de la méthode du pivot.
3. Introduction aux tests statistiques. Erreurs de première et seconde espèce, fonction puissance. Construction de tests à partir d'intervalles de confiance.
4. Les vecteurs gaussiens, le théorème de Cochran et ses applications dans le modèle linéaire gaussien.
5. La fonction de répartition et la fonction quantile. Statistique d'ordre.
6. Estimation et test dans les modèles non-paramétriques : utilisation de la mesure empirique. Estimation de la fonction de répartition et des quantiles. Tests de Kolmogorov-Smirnov.
7. Estimation dans les modèles paramétriques. Estimateurs basés sur la méthode des moments. Estimateur du maximum de vraisemblance. Exemples et contre-exemples. Comparaison de procédures d'estimation. Introduction au paradigme bayésien et à l'estimation bayésienne.
8. Estimation dans les familles exponentielles à un paramètre.
9. Tests dans les modèles paramétriques. Test de Neyman-Pearson, test du rapport de vraisemblances.
10. Test à rapports de vraisemblances monotones.
11. Tests du  $\chi^2$  : adéquation à une loi, à une famille de lois. Test du  $\chi^2$  d'indépendance.

## Contrôle optimal et introduction à l'apprentissage par renforcement

L'objectif du cours est d'introduire les processus de décision markoviens, utilisés pour modéliser l'évolution (avec le temps) d'un agent rationnel dans un environnement incertain (évoluant lui-même avec le temps). L'agent rationnel représente ici un individu ou une machine capable de prendre des décisions ; l'agent effectue ses choix de façon rationnelle dans le but d'améliorer sa situation propre. Mathématiquement, l'état de l'agent est codé sous la forme d'une chaîne de Markov dépendant d'un contrôle ; sa situation est résumée à l'aide d'un critère de performance, moyennisé par rapport aux issues possibles de l'environnement. L'objectif principal est d'identifier, mathématiquement, la meilleure décision possible et de voir comment elle peut être approchée numériquement. Les applications sont très nombreuses. En voici deux qui seront abordées en cours :

(i) ce paradigme est aujourd'hui utilisé en théorie de l'apprentissage par renforcement

(ii) il est également utilisé en mathématiques financières dans la gestion de portefeuille.

## EDP et calcul scientifique avancés

Dans ce cours, l'alternant approfondira ses connaissances en modélisation, simulation, estimation et prédiction à l'aide d'outils des EDP et du calcul scientifique.

## Apprentissage supervisé

Dans ce cours, nous mettrons en pratique (en utilisant le logiciel R) certains points abordés dans le cours de Statistiques mathématiques. L'objectif sera double : consolider les compétences en programmation d'une part et mettre en pratique des méthodes vues dans d'autres cours sous un angle théorique.

## Probabilités et statistiques avancées

Dans ce cours, l'alternant approfondira ses connaissances en modélisation, simulation, estimation et prédiction à l'aide d'outils probabilistes et statistiques.

## Modèles spatio-temporels en Sciences du Vivant

1. Equations de réaction-diffusion
2. Chimiotaxie et mécanismes non locaux
3. Ondes progressives et ondes spirales
4. Formation de structures spatiales
5. Ondes Calcium, Ondes spirales Belousov-Zhabotinski,
6. Ecologie et épidémiologie : aspects spatiaux.

## Modèles de populations structurées

1. L'équation de transport
2. L'équation de renouvellement
3. L'équation de croissance-fragmentation
4. La fragmentation auto-similaire