

Certificat Mathématiques pour l'Ingénierie

Syllabus et Prérequis

1. Analyse pour les Sciences Appliquées

Syllabus :

L'intégration est l'un des piliers de l'analyse mathématique : elle permet d'évaluer des grandeurs, physiques, statistiques et probabilistes. Dans les premiers cours d'analyse, elle est introduite par l'intégrale de Riemann, fondée sur la subdivision du domaine de départ et l'approximation par des fonctions en escalier.

Bien qu'efficace pour les fonctions continues par morceaux sur un segment compact, cette théorie présente toutefois plusieurs limites. Elle ne permet pas d'intégrer les fonctions trop discontinues. Les conditions d'interversion entre limite et intégrale sont restrictives, car elles reposent essentiellement sur la convergence uniforme. Enfin, l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann n'est pas complet, ce qui empêche d'y appliquer la géométrie des espaces de Banach ou de Hilbert.

Pour surmonter ces difficultés, Henri Lebesgue a développé au début du XX^e siècle une théorie fondée non plus sur la subdivision de l'ensemble de départ, mais sur celle de l'ensemble d'arrivée, et sur la mesure des ensembles. Cette approche apporte des avancées décisives : elle permet d'intégrer des fonctions très irrégulières, fournit des critères souples pour intervertir limite et intégrale, et donne naissance aux espaces de Lebesgue, cadre fondamental de l'analyse fonctionnelle moderne.

La théorie de Lebesgue est ainsi devenue le langage naturel de nombreuses disciplines théoriques et appliquées : théorie moderne des probabilités, analyse de Fourier, étude des équations aux dérivées partielles et traitement du signal.

Plan du cours

Théorie de la mesure
Intégration de Lebesgue
Intégrales à paramètre
Intégrales multiples

Prérequis :

Une bonne connaissance des concepts d'analyse et d'algèbre linéaire abordés au cours des deux premières années de licence.

Théorie des ensembles (complémentaire, intersection, réunion, ensemble dénombrable, ensemble non-dénombrable).

Analyse réelle et topologie (suite numérique, intégrale de Riemann, intégrale généralisée, série numérique, série de fonctions, suite de fonctions, série de fonctions, topologie de $\mathbb{R}^n$).

Algèbre linéaire et espaces vectoriels normés (produit scalaire, projection orthogonale, espace complet).

2. Probabilités et ses Applications

Syllabus :

Le but de ce cours est d'offrir une introduction rigoureuse à la théorie des probabilités, en s'appuyant sur les bases de la théorie de la mesure. Cette approche abstraite permettra d'introduire et de formaliser des concepts probabilistes fondamentaux. Ces outils sont essentiels pour aborder, au niveau Master, des domaines tels que les mathématiques financières ou les modèles statistiques avancés en Data Science.

Prérequis :

- 1) Calcul d'intégrales ;
- 2) Le cours 'Analyse pour les Sciences Appliquées' (en particulier, la section sur la théorie de la mesure) est un prérequis pour le cours 'Probabilités et Applications'.

3. Modélisation statistique

Syllabus :

Ce cours de modélisation statistique vise à introduire les concepts de base de la statistique inférentielle. Celle-ci ambitionne d'inférer des caractéristiques de la population à partir de données observées sur un échantillon. Elle vise par exemple à estimer les paramètres d'une distribution de probabilités dont est supposée être issue la population, et elle permet aussi d'associer une incertitude à cette estimation. Cette inférence se fait au prix d'hypothèses probabilistes sur la façon dont l'échantillon a été généré, celui-ci étant vu comme une réalisation d'un ensemble de variables aléatoires.

Dans ce cours nous commencerons par quelques rappels élémentaires en probabilités, puis nous définirons les différents types de convergences de suites de variables aléatoires pour ensuite traiter les théorèmes de convergence que sont la loi des grands nombres et le théorème central limite. Une fois ce décor posé, nous nous attaquerons à la notion d'estimateur, d'intervalles de confiance et de tests d'hypothèses. Ceux-ci permettant d'apporter des réponses rigoureuses à tout un ensemble de questions statistiques. Enfin, nous terminerons par le cas de la régression linéaire à laquelle nous appliquerons l'ensemble des notions étudiées précédemment.

Prérequis :

Bases d'analyse et de Probabilités élémentaires, (notions de variables aléatoires).
Idéalement avoir suivi le cours 'Probabilités et applications'.

4. Systèmes dynamiques et Analyse numérique

Syllabus :

Ce cours porte sur l'étude des équations différentielles ordinaires (EDO) qui constituent un outil de modélisation très utilisé dans de nombreuses applications. Les lois de la mécanique et de la physique s'expriment à travers des équations différentielles, à commencer par la plus célèbre d'entre elles $F=m \cdot \Gamma$ (2ème loi universelle de Newton (1642-1727)). L'écologie, l'épidémiologie et la physiologie ne sont également pas en reste, tout comme les activités humaines notamment l'économie, la finance, l'énergie, le transport, l'ingénierie, ...

Disposer de la solution d'une équation différentielle (ou d'un système de plusieurs équations différentielles) permet de prédire le comportement futur du système modélisé par cette équation différentielle. Malheureusement le calcul analytique de la solution n'est possible que dans de certains cas particuliers que nous étudierons. Dans le cas général, il faut avoir recours à la simulation numérique qui permet de déterminer des solutions approchées de ces équations. Il est alors nécessaire de maîtriser la stabilité et la précision de ces approximations. A l'occasion de ce cours, nous aborderons quelques aspects théoriques des EDO, le calcul de solutions analytiques et leur approximation numérique en tentant à travers des exemples d'applications simples de transmettre certains des concepts fondamentaux de cette discipline.

Prérequis :

- 1) Analyse réelle, fonctions d'une variable, notions de base sur les fonctions de deux variables et dérivées partielles ;
- 2) Algèbre linéaire et espaces vectoriels normés, calcul matriciel.